ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 21.12.2023

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Использование производной функции в экономике. Экономический смысл производной»

Производительность труда

Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая объём произведённой продукции *u* за время *t*. Тогда за время $\Delta t = t_1 - t_0$ величина произведённой продукции составит

$$\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

Средняя производительность труда – это отношение количества произведённой продукции к затраченному времени, т.е. $z_{cp} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

Производительностью труда в момент времени t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp} при $\Delta t \to 0$: $z(t) = u'(t)$

Предельные затраты

Пусть q – объём произведённой продукции, C – её себестоимость (или издержки), зависящая от q, т.е. $C = f(q)$.

Средние затраты на единицу продукции (средняя себестоимость) определяются по формуле

$$C_{cp} = \frac{C}{q} = \frac{f(q)}{q}$$

Найдём ΔC – приращение затрат на производство, связанное с увеличением объёма произведённой продукции на величину Δq:

$$\Delta C = \Delta f = f(q + \Delta q) - f(q)$$

Отношение $\Delta C_{cp} = \dfrac{\Delta C}{\Delta q}$ есть *среднее приращение затрат на производство,* т.е. приращение затрат на единицу произведённой продукции. Тогда, если существует

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = C'(q)$$

То $C'(q)$ называют *предельными затратами на производство* (себестоимостью). В экономических исследованиях предельные издержки называют *маржинальными* и обозначают через *MC*, т.е. $MC = C'(q)$

Предельный доход

Пусть функция $R(q)$ отражает зависимость дохода R от объёма продукции q. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут к формуле

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q)$$

Величина $R'(q)$ определяет *предельный доход*, который называют *маржинальным* и обозначают через *MC*, т.е. $MR = R'(q)$

Задача: Объём продукции *u*, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, где t – время, ч; причём $1 \le t \le 8$. Необходимо вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.

Решение:

Производительность труда $z(t)$ выражается формулой $z(t) = u'(t)$. Тогда

$z(t) = u'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$

Производительность труда через 1 ч после начала работы

$z(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$ (у.е.)

Производительность труда за 1 ч до окончания работы

$z(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ (у.е.)

Скорость изменения производительности труда $z'(t) = -5t + 15$

Значит, $z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$, $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$

Задача: Затраты на производство продукции объёма *x* задаются функцией $C(x) = x^2 + 5x = 4$. Производитель реализует продукцию по цене 25 ден.ед. Найдите максимальную прибыль П и соответствующий объём продукции *x*.

Решение:

Прибыль равна разности между выручкой *U* и затратами *C*: П= *U* – *C*.

Реализовав продукцию объёма *x* по цене 25 ден.ед., предприниматель имеет выручку, $U = 25x$. При этом затраты составят $C(x)$. Значит,

$$П = U - C = 25x - (x^2 + 5x + 4) = -x^2 + 20x - 4$$

По смыслу задачи объём продукции x может принимать любое положительное значение, т.е. $x \in (0, +\infty)$.

Найти наибольшее значение функции

$П(x) = -x^2 + 20x - 4$ при $x \in (0, +\infty)$

$П'(x) = -2x + 20$

$П'(x) = 0$, $-2x + 20 = 0$, следовательно стационарная точка функции $x = 10$

Производная меняет свой знак при переходе через эту точку с «+» на «–», значит $x = 10$ – точка максимума.

$$П_{\max} = П(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 - 4 = 96$$

Максимальная прибыль, равная 96 ден.ед., достигается при объёме производства 10 у.е.

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru